Лекция 10

Анықтама. Айталық $x \in R^1$ болсын. Онда

$$F_{\xi}(x) = P\{\omega : \xi(\omega) \le x\} \tag{9}$$

функциясы ξ кездейсоқ шамасының *үлестірім (үлестіру) функциясы* деп аталады.

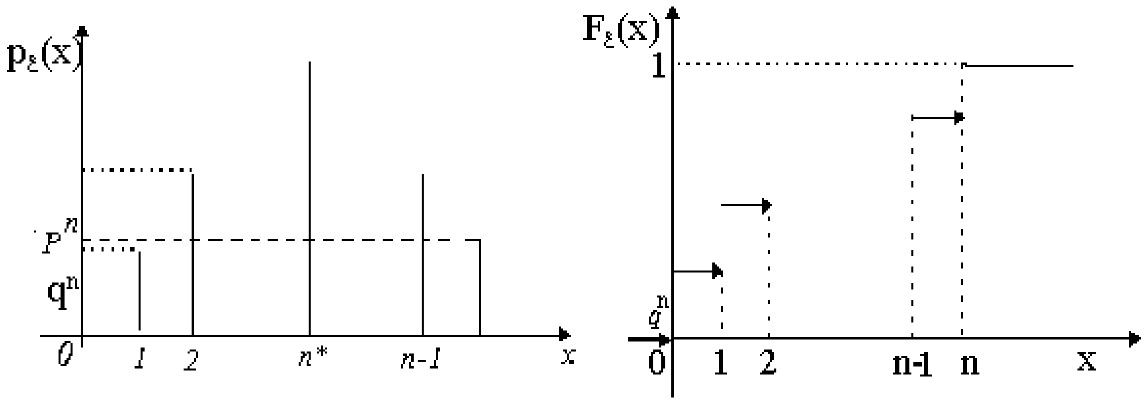
Әрине

$$F_{\xi}(x) = \sum_{i: x_i \le x} P\{\omega : \xi(\omega) = x_i\} = \sum_{i: x_i \le x} \mathrm{P}_{\xi}(x_i)$$

болатындығы түсінікті. Бұдан

$$\mathrm{P}_{\xi}(x_i) = F_{\xi}(x) - F_{\xi}(x-)$$

мұндағы $F_{\xi}(x-) = \lim\limits_{y \downarrow x} F_{\xi}(y)$ болатыны шығады. Төмендегі графиктерде $\xi \sim Bi(n,p)$ биномдық кездейсоқ шамасы үшін $\mathrm{P}_{\xi}(x)$ және $F_{\xi}(x)$ функциялары кескінделген.



1-сурет

2-анықтамадан $F_{\xi}(x)$ үлестірім функциясының мынандай қасиеттері шығатынына тікелей көз жеткізу қиын емес:

F0. $0 \le F_{\xi}(x) \le 1$

F1. Егер $x < y$ болса, онда $F_{\xi}(x) \le F_{\xi}(y)$ (үлестіру функциясының *монотондылық қасиеті*)

F2. $F_{\xi}(-\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F_{\xi}(x) = 0$; $F_{\xi}(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F_{\xi}(x) = 1$

F3. $F_\xi(x)$ оң жағынан үзіліссіз $\left(F_\xi(x+0)=\lim\limits_{y\downarrow x}F_\xi(y)=F_\xi(x)\right)$ және б-лікті-тұрақты.

Есеп. $F0, F1, F2, F3$ қасиеттерін дәлелдеңіз.

Егер $F_\xi(x)$ функциясы белгілі болса, онда ол арқылы ξ кездейсоқ шамасының $(a,b]$, (a,b), $[a,b]$, $[a,b)$, $[a,+\infty)$, $(a,+\infty)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,b)$, $\{b\}=[b,b]$ интервалының кез келгеніне түсу ықтималдығын есептеуге болады.

Айталық $a<b$ болсын. Онда

$$\{\omega:\ \xi(\omega)\le b\}=\{\omega:\ \xi(\omega)\le a\}+\{\omega:\ a<\xi(\omega)\le b\}$$

болғандықтан

$$P\{\omega:\ \xi(\omega)\le b\}=P\{\omega:\ \xi(\omega)\le a\}+P\{\omega:\ a<\xi(\omega)\le b\}$$

Демек

$$P\{\omega:\ \xi(\omega)\in(a,b]\}=P\{\omega:\ a<\xi(\omega)\le b\}=F_\xi(b)-F_\xi(a) \qquad (9')$$

Сол сияқты

$$\{\omega:\ \xi(\omega)<b\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\omega:\ b-\frac{1}{n-1}<\xi(\omega)\le b-\frac{1}{n}\right\}$$

болғандықтан ықтималдықтың саналымды аддитивтілік қасиеті және үлестірім функциясының алдыңғы қасиеті бойынша

$$P\{\omega:\ \xi(\omega)<b\}=\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{\omega:\ b-\frac{1}{n-1}<\xi(\omega)\le b-\frac{1}{n}\right\}=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left[F_\xi\left(b-\frac{1}{n}\right)-F_\xi\left(b-\frac{1}{n-1}\right)\right]=F_\xi(b-1)+$$

$$+\lim_{N\to\infty}\left[F_\xi\left(b-\frac{1}{N}\right)-F_\xi(b-1)\right]=\lim_{N\to\infty}F_\xi\left(b-\frac{1}{N}\right)=$$

$$=F_\xi(b-0)=\lim_{x\uparrow b}F_\xi(x)$$

Яғни

$$P\{\omega:\ \xi(\omega)<b\}=F_\xi(b-0)$$

Ары қарай

$$\{\omega:\ \xi(\omega)<b\}+\{\omega:\ \xi(\omega)=b\}=\{\omega:\ \xi(\omega)\le b\}$$

болғанынан

$$P\{\xi=b\}=F_\xi(b)-F_\xi(b-0)$$

шығады. Дәлелденген қатынастар бізге мына қатынастардың дұрыстығын көрсетуге мүмкіндік береді.

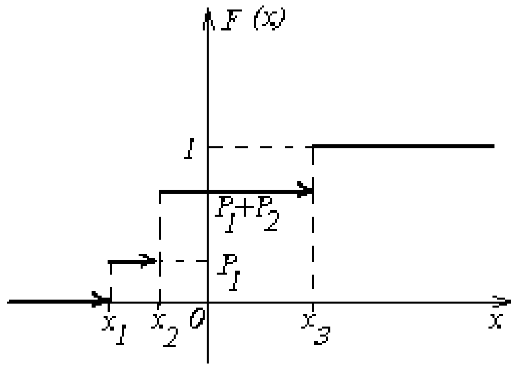
$$P\{a \le \xi \le b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a-0)$$
$$P\{a < \xi < b\} = F_\xi(b-0) - F_\xi(a) \qquad (9'')$$
$$P\{a \le \xi < b\} = F_\xi(b-0) - F_\xi(a-0)$$
$$P\{\xi > a\} = 1 - F_\xi(a)$$
$$P\{\xi \ge a\} = 1 - F_\xi(a-0)$$

Есеп. Жоғарыда келтірілген $(9'')$ қасиеттерді дәлелдеңіз.

Жоғарыдағы $F3$ қатынасы дискретті ξ кездейсоқ шамасы үшін оның үлестірім функциясының оң жағынан үзіліссіз және бөлікті- тұрақты функция болатынын көрсетеді. Мысал ретінде $x_1 < x_2 < 0,\ \ x_3 > 0$ мәндерін сәйкес p_1, p_2, p_3 ықтималдықтарымен қабылдайтын ξ кездейсоқ шамасының $F_\xi(x)$ үлестірім функциясының графигін салып көрсетейік. Анықтама бойынша

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & егер\ \ x < x_1 \\ p_1, & егер\ \ x_1 \le x < x_2 \\ p_1 + p_2, & егер\ \ x_2 \le x < x_3 \\ 1 = p_1 + p_2 + p_3, & егер\ \ x \ge x_3 \end{cases}$$

Демек бұл функцияның графигінің түрі мынандай болады.



Абсолютті үзіліссіз кездейсоқ шамалар

Егер ξ кездейсоқ шамасы үшін теріс емес $f(x) = f_\xi(x) \ge 0$ функциясы табылып, оның үлестірім функциясы

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(y)dy\ , \qquad x \in R\ , \qquad (10)$$

интегралы түрінде жазылатын болса, онда мұндай абсолютті үзіліссіз үлестірім функциясына сәйкес кездейсоқ шаманы *абсолютті үзіліссіз* *кездейсоқ шама* деп атаймыз. (10)-формуладағы интегралды бұл тарауда біз меншіксіз Риман интегралы мағынасында түсінеміз, ал жалпы жағдайда бұл интегралды Лебег интегралы ретінде түсіну керек).

Анықтамадан үлестірім тығыздығы $f_\xi(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1$$

шартын қанағаттандыратынын (өйткені $\lim_{x\uparrow+\infty} F_\xi(x) = F_\xi(+\infty) = 1$), және, егер x нүктесі $f_\xi(x)$ функцияның үзіліссіздік нүктесі болса, онда жеткілікті аз Δx шамасы үшін

$$P\{x < \xi \le x + \Delta x\} = f_\xi(x)\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0,$$

болатынын аламыз.

(10)-анықтамадан сонымен бірге $f_\xi(x)$ функциясының үзіліссіздік нүктелерінде

$$F'_\xi(x) = f_\xi(x)$$

қатынасы орындалатынын және кез келген $a < b$ үшін

$$P\{a < \xi \le b\} = P_\xi(a, b] = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_a^b f_\xi(x)dx \qquad (11)$$

формуласы дұрыс болатынын көреміз. Соңғы формуладан кез келген абсолютті үзіліссіз ξ кездейсоқ шамасы үшін оның қандай да бір жеке мәнді қабылдау ықтималдығы әрқашан нөлге тең болатыны шығатыны айқын: $P\{\xi = a\} = 0$, $a \in R$. Бұдан, кез келген интервал I үшін ($I = (a, b)$, немесе $I = [a, b)$ т.с.с.)

$$P\{\xi \in I\} = P_\xi(I) = \int_I f_\xi(x)dx$$

формуласының дұрыс болатынын байқаймыз. Жалпы, $f_\xi(x)$ үлестірім тығыздығы арқылы ξ кездейсоқ шамасының кез келген $B \in \beta(R)$ борелдік жиынына түсу ықтималдығын

$$P\{\xi \in B\} = \int_B f_\xi(x)dx \qquad (11')$$

(Лебег) интегралы арқылы есептеуге болатынын дәлелдеуге болады (III-тарау, §1, 1.4-пункт).

Абсолютті үзіліссіз кездейсоқ шамалардың мысалдары

1. $[a,b]$, $a<b$, *аралығында бірқалыпты үлестірілген* кездейсоқ шама**.** Айталық, $[a,b]$ кесіндісіне кездейсоқ нүкте қойылған болсын, яғни нүктенің $[a,b]$ кесіндісінің қандай да бір бөлігіне түсу ықтималдығы осы бөліктің ұзындығына тура пропорционал болсын ([9], I-тарау, §4). Бізде енді элементар оқиғалар кеңістігі $\Omega=[a,b]$, $\mathcal{F}=\{B\cap[a,b]\colon B\in\beta(R)\}$ – $[a,b]$ кесіндісіндегі борелдік жиындардың $\sigma-$алгебрасы. ξ кездейсоқ шамасын былай анықталық:

$$\xi(\omega)=\omega\,,\quad \omega\in[a,b],$$

яғни кездейсоқ шама ретінде кесіндіге кездейсоқ қойылған нүктенің
координатасын алалық. Бұл өлшенетін функция. Егер $x<a$ болса, онда $F_\xi(x)=P\{\xi\le x\}=0$. Егер $x\in[a,b]$ болса, онда $\{\xi\le x\}$ оқиғасы нүктенің $[a,x]$ интервалына түсуін білдіретін оқиға, демек

$$F_\xi(x)=P\{\xi\le x\}=\frac{x-a}{b-a},\quad a\le x\le b\,.$$

Егер де $x>b$ болса, онда әрине $\{\xi\le x\}$ ақиқат оқиға, яғни $P\{\xi\le x\}=1$. Сонымен

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0\,, & x\le a\,,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\,,\\ 1\,, & x\ge b\,,\end{cases}$$

ал сәйкес үлестірім тығыздығы

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\,,\\ 0\,, & x\notin[a,b].\end{cases}$$

Жоғарыдағыдай анықталған ξ кездейсоқ шамасын $[a,b]$ аралығында *бірқалыпты үлестірілген* кездейсоқ шама деп атаймыз және оны көбіне символикалық түрде $\xi \sim U(a,b)$ түрінде жазатын боламыз.

2-ескерту. Егер $\lambda(B)$ $(R, \beta(R))$ кеңістігіндегі *Лебег өлшемі* болса, онда кез келген $B \in \beta(R)$ борелдік жиыны және $\xi \sim U(a,b)$ үшін $P_{\xi}(B) = P\{\xi \in B\} = \frac{1}{b-a}\lambda(B \cap [a,b])$ болатынын көрсетуге болады (III-тарау, 1.4-пункт).

2. *Параметрі* λ *– ға тең* $(\lambda > 0)$ *көрсеткіштік кездейсоқ шама.* Мұндай кездейсоқ шаманың үлестірім функциясы

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

қатынасымен анықталады (**F1**, **F2**, **F3** – қатынастары орындалатыны айқын), ал

оның тығыздығы

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

3. *Параметрлері* (a, σ^2) *болатын нормаль (қалыпты, гаустік) кездейсоқ*

шама үлестірім функциясы

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}} dy$$

қатынасымен берілетін кездейсоқ шама ретінде анықталады, мұндағы параметрлер $a \in R$, $\sigma > 0$.

Бұл функцияның үлестірім функциясы болатынын көрсетелік. **F3** – қасиеті $F_{\xi}(x)$ үзіліссіз функция болатындығынан шығады. Ал **F1**, **F2** қасиеттері интеграл таңбасы астындағы функцияның теріс еместігінен және

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma\sqrt{2\pi}$$

қатынасының дұрыстығынан шығады (соңғы қатынас анализден белгілі *Пуассон интегралы*).

Сонымен нормаль кездейсоқ шаманың үлестірім функциясы екі, a және σ^2 параметрлеріне тәуелді. Егер $a = 0$, $\sigma = 1$ болса, онда мұндай нормаль үлестірімді *стандартты нормаль үлестірім* деп атайтын боламыз.

Бұдан былай қарай параметрлері a және σ^2 болатын ξ нормаль кездейсоқ шамасын қысқаша символикалық түрде $\xi \sim N\left(a, \sigma^2\right)$ немесе $\xi \sim N\left(a, \sigma^2\right)$ арқылы жазатын боламыз.

$\xi \sim N\left(a, \sigma^2\right)$ кездейсоқ шамасының үлестірім тығыздығы

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \tag{14'}$$

функциясы болатыны түсінікті.

$f_\xi(x)$ функциясы максималды мәнін $x = a$ нүктесінде қабылдайды, $x = a \pm \sigma$ нүктелері иілу нүктелері болады; ал абцисса осі $x \to \pm\infty$ кезде бұл функцияның асимптотасы болады. Функцияның графигі әруақытта $x = a$ түзуіне байланысты симметриялы. Сонымен бірге $\sigma -$ кеміген сайын функцияның максимумы үлкейе беретінін, ал графиктің ордината осіне қысылуы арта түсетінін байқаймыз. Бұдан, мәселен, кездейсоқ шаманың $(-\alpha, \alpha)$ интервалына түсу ықтималдығы $p(\alpha) = \int_{-\alpha}^{\alpha} f_\xi(x)dx$ қай кездейсоқ шама үшін параметр σ аз болса, сол кездейсоқ шама үшін үлкен болатыны шығады. Демек, біз $\sigma -$ параметрін кездейсоқ шаманың мәндерінің шашырауының сипаттамасы ретінде қарастыра аламыз (2-суретті қараңыз).

3-ескерту. Соңғы жазылған үлестірім тығыздығымен біз Муавр-Лапластың интегралдық теоремасын дәлелдеу барысында ұшырасқан болатынбыз. Қалыптасқан дәстүр бойынша стандартты нормаль кездейсоқ шаманың тығыздығын әдетте $\varphi_{0,1}(x)$ не $\varphi(x)$ арқылы белгілейді:

$$\varphi_{0,1}(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad (14'')$$

$\xi \sim N\left(a, \sigma^2\right)$ кездейсоқ шамасының үлестірім тығыздығы үшін көбіне $\varphi_{a,\sigma^2}(x)$ белгілеуі қолданылады:

$$\varphi_{a,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

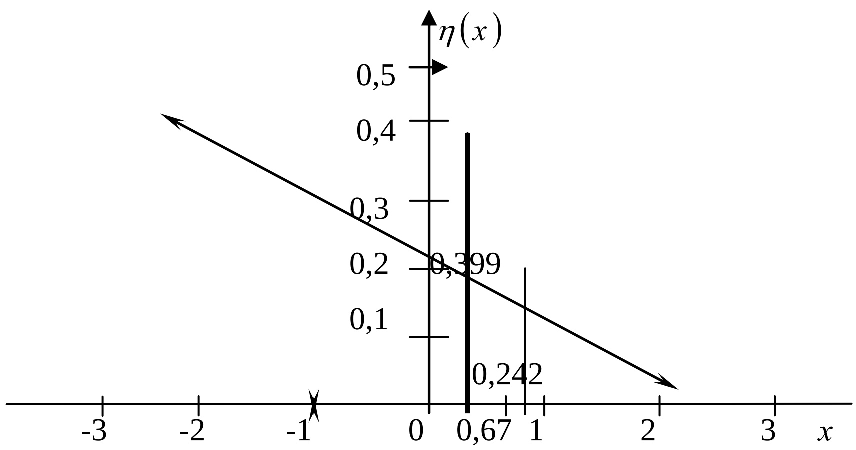
$\xi \sim N\left(0, 1\right)$ кездейсоқ шамасының үлестірім функциясын $\Phi_{0,1}(x)$ не $\Phi(x)$ арқылы белгілейді де, оны әдетте *Лаплас функциясы* немесе *қателер интегралы* деп атайды. Бұл жерде тек кейбір әдебиеттерде *Лаплас функциясы* деп

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \varphi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

функциясын атайтынын және $\Phi(x)$ пен $\Phi_0(x)$ функциялары

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

қатынастары арқылы байланысатынын ескерте кетеміз.



2-сурет

4. *Параметрі θ – ға, $\theta > 0$, тең болатын Кошилік* кездейсоқ шама үлестірім функциясы

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{x} \frac{\theta}{\theta^2 + y^2} dy \qquad (15)$$

функциясы болатын ξ кездейсоқ шамасы ретінде анықталады. Бұл функция үшін де үлестірім функциясының **F1**–**F3** қасиеттері орындалатынын тексеру қиын емес. Сәйкес үлестірім тығыздығы енді былайша анықталады:

$$f_{\xi}(x) = \frac{\theta}{\pi(\theta^2 + x^2)}, \qquad x \in R\,, \qquad (15')$$

Параметрі θ –ға тең Кошилік кездейсоқ шаманы көбіне қысқаша символикалық түрде $\xi \sim K(\theta)$ арқылы жазатын боламыз.